



## An Analysis of Mathematical Errors Among First-Year Engineering Students: The Case of the Support and Remedial Program (PANI)

## Análisis de los errores en matemática de los alumnos ingresantes a las carreras de Ingeniería: El caso del Programa de Acompañamiento y Nivelación (PANI)

Minnaard, Claudia<sup>1</sup>, Torres, Zulma<sup>2</sup>, Ramos, Florencia<sup>3</sup>

<sup>1</sup>, Instituto Investigaciones Tecnología y Educación –Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Lomas de Zamora – Argentina

<sup>2</sup>, Instituto Investigaciones Tecnología y Educación –Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Lomas de Zamora – Argentina

<sup>3</sup>, Instituto Investigaciones Tecnología y Educación –Facultad de Ingeniería- Universidad Nacional de Lomas de Zamora – Argentina

**Abstract:** In the learning process, students' work often reveals errors that originate from the process itself. These errors interlink, forming complex conceptual networks that act as cognitive obstacles, manifesting as incorrect answers. This paper describes the most frequent mathematical errors observed within the Accompaniment and Remedial Program (PANI). The primary goal of PANI is to facilitate students' initial transition into university and to address their foundational deficits in mathematics. The study's findings are based on a detailed analysis of the errors committed by the students, taking into account the diverse profiles of the incoming class. This comprehensive evaluation of these factors provides an empirical basis for understanding the specific academic challenges faced by students in this subject area.

**Keywords:** Mathematical errors, Learning processes.

**Resumen:** Durante el proceso de aprendizaje, es común identificar errores en las producciones de los estudiantes. La naturaleza de estos errores es multifacética, ya que emergen del propio proceso cognitivo y, al interconectarse, dan lugar a complejas redes conceptuales. Estos patrones erróneos se manifiestan en la práctica como obstáculos epistemológicos que conducen a respuestas incorrectas. Este estudio se enfoca en la descripción de los errores más recurrentes en el ámbito de las matemáticas, en el marco del Programa de Acompañamiento y Nivelación (PANI). El PANI tiene como objetivo principal facilitar la transición de los estudiantes al entorno universitario y mitigar las deficiencias académicas detectadas en el área de las matemáticas. La investigación se centró en el análisis detallado de los errores cometidos por los estudiantes, así como en la caracterización de los perfiles de los ingresantes. Los hallazgos de este análisis están basados en una evaluación integral de estos factores, proporcionando una base empírica para la comprensión de las dificultades académicas en la materia.

**Palabras clave:** Errores matemáticos, Procesos de aprendizaje.

## I. Introducción

Son diversos los autores que han encarado la aparición de errores en los trabajos de los estudiantes. En esta línea, algunos autores consideran que “algunos obstáculos o dificultades que encara un estudiante en el manejo del lenguaje matemático son fuente de errores en la solución de problemas. La naturaleza del obstáculo puede explorarse mediante el análisis de los errores cometidos”. (Radillo Enriquez, M. & Huerta Varela, S. (2007))

Bachelard (1988) introduce el concepto de obstáculo epistemológico considerando que “se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza”.

En el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos, siendo la evidencia de los obstáculos en los procesos cognitivos. (Minnaard ,2015; Del Puerto, Minnaard & Seminara, 2006, 2007)

Godino (2003) plantea que “el estudiante, al resolver el problema, no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita evocar diferentes conceptos o nociones matemáticas que previamente conoce y en los que se apoya para resolver el problema, mediante sus definiciones o descripciones características”.

En educación durante el proceso de aprendizaje se detectan en sus trabajos errores, cuya génesis está en el mismo proceso y estos a su vez se conectan formando redes verdaderamente complejas, actuando como obstáculos que se translucen en la práctica en respuestas erróneas.

Los errores más frecuentes se producen por tratar de adaptar los conocimientos que se adquirieron con anterioridad a nuevas situaciones.

Abrate, Pochulu y Vargas (2006) sostienen que “es importante recordar que los errores, al igual que el fenómeno educativo, son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables; por ejemplo, profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural. De allí la dificultad comprensible de aislar y delimitar las causas de un error con miras a su tratamiento”.

Pochulu (2005) considera que “es de destacar que los errores no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente”.

Asimismo, indica que los estudios que aborda el análisis de errores se los pueden agrupar según los objetivos que persiguen como el superar el error a través de la eliminación del mismo o estudiando sus potencialidades.

Actualmente el error es considerado una parte importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Los especialistas sugieren diagnosticar los errores, detectar las concepciones erróneas de los alumnos e implementar estrategias que permitan superarlas. (Rohimah, S.; Prabawanto, S. (2019).

## II. Desarrollo

En el marco del Programa de Acompañamiento y Nivelación (PANI) implementado por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora (FIUNLZ) se analizan los errores en matemática cometidos por los estudiantes ingresantes. El PANI apunta a acompañar los primeros pasos de los estudiantes en la vida universitaria, así como nivelar los déficits que se observan en matemática. El PANI está compuesto por 5 talleres que abarcan los siguientes contenidos: Números reales; Relaciones trigonométricas; Polinomios y expresiones racionales; Ecuaciones, inecuaciones y Sistemas de ecuaciones; Función lineal y función cuadrática.

El PANI se ha desarrollado en tres ediciones en febrero, junio y noviembre 2023 siendo evaluados 850 estudiantes, después de un curso presencial de 5 semanas. Para el presente trabajo se focalizó en la edición de noviembre 2023 y en la unidad de Relaciones trigonométricas. La muestra considerada fue de 203 estudiantes.

Los contenidos que se desarrollan en este taller son:

UNIDAD 4: Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

1er Eje: Ángulos: sistemas de medición.

2do Eje: Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

3er Eje: Teorema de Pitágoras. Resolución de triángulos rectángulos. Resolución de triángulos oblicuángulos

Por otra parte, para clasificar los errores se utilizó la clasificación de Radatz (1980) que se detalla a continuación.

Clasificación de los errores

1. *Dificultades del lenguaje*: Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.

2. *Dificultades para obtener información espacial*: Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.

3. *Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*: Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios

4. *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento*: Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas. Dentro de esta clase de errores se tienen: 4.1. Por perseveración Predominan los elementos singulares de un problema. 4.2. *De asociación*: Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.

4.3. *De interferencia*: Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros.

5. *Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*: Errores producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares en contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática.

La investigación se desarrolla en forma descriptivo-correlacional ya que se propone describir el comportamiento de variables y/o identificar tipos o pautas características resultantes de las combinaciones de un cierto número de ellas. Asimismo, las características del trabajo que se propone son transeccionales, ya que los datos se recogen en un momento determinado.

### III. Resultados

La estructura de las evaluaciones del Taller de Relaciones Trigonométricas fue de 4 ejercicios, uno del 1er Eje: Ángulos: sistemas de medición, otro de ecuaciones trigonométricas con respuestas dentro del primer giro y en el sistema circular y los dos restantes de resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Al clasificar los errores utilizando la clasificación de Radatz observamos que el tipo de error más recurrente está relacionado con la Dificultad de obtener información espacial (40%) y con Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento (42%).

	Dificultades del lenguaje	Dificultades para obtener información espacial	Aprendizaje de hechos, destrezas y conceptos previos	Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento	Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes
Relaciones trigonométricas TD 2013	8%	0%	30%	57%	5%
Relaciones trigonométricas PANI 2023	6%	40%	14%	42%	12%

Tabla 1: Distribución porcentual de los errores de acuerdo a la clasificación de Radatz. (Tamaño de la muestra PANI 2023 : 203 estudiantes)

En la Tabla 1 se presenta la clasificación de los errores y se compara con los resultados obtenidos en el Test diagnóstico 2013. (TD 2013)

El Test diagnóstico se concibió como una prueba piloto, se realizó on-line, y se generó automáticamente para cada alumno en forma aleatoria de ejercicios tomados de un banco de ejercicios. Se implementó en 60 universidades de todo el país (públicas y privadas) del 4 de febrero al 31 de marzo de 2013. Los resultados presentados en la Tabla 1 corresponden a la FIUNLZ.

Cabe destacar que en el TD los problemas presentados en Relaciones trigonométricas venían acompañados en muchos casos por los gráficos teniendo entonces, dos registros de representación semiótica: textual y gráfico. En cambio, en el PANI 2023 los problemas eran textuales y los estudiantes tenían que graficar antes de su resolución. Ese tipo de errores se evidenció en los problemas en los que tenían que reducir al primer cuadrante y al no graficar no indicaban el signo adecuado. También en los problemas en los que tenían que aplicar resolución de triángulos rectángulos u oblicuángulos.

En la Tabla 2 se muestran los ejes con mayor dificultad

	Bien resuelto	Regular	Mal resuelto
1er Eje: Ángulos: sistemas de medición	16%	52%	33%
2do Eje: Relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo	34%	21%	45%
3er Eje: Teorema de Pitágoras. Resolución de triángulos rectángulos	64%	16%	21%
3er Eje: Resolución de triángulos oblicuángulos	52%	12%	36%

Tabla 2: Distribución porcentual de los errores de acuerdo a los ejes temáticos (Tamaño de la muestra 203 estudiantes)

Se observa que, en el 1er Eje relacionado con sistemas de medición, el 85% lo resolvió en forma regular o mal. Tal como afirmamos anteriormente al no graficar los ángulos confundieron los signos o no resolvieron la función trigonométrica pedida.

Un error muy común es utilizar una cadena de igualdades aplicando estrategias de reducción al primer cuadrante inadecuadas y mezclando ángulos y funciones trigonométricas de dichos ángulos tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\cos(300^\circ) = 300^\circ - 180^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \pi/3$$

Con respecto al problema de ecuaciones trigonométricas, se pedían todas las soluciones en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y muchos estudiantes daban las soluciones solamente en el primer cuadrante. Asimismo, aplican reglas de linealidad inadecuadas.

En el problema de triángulos oblicuángulos al aplicar el teorema del seno simplificaban las funciones trigonométricas mezclando medidas de los catetos y ángulos.

Al aplicar una prueba de  $\chi^2$  de independencia entre las variables ejes temáticos y grado de resolución de los problemas se obtuvo que hay dependencia entre ambas variables. ( $p=0 < \alpha=0,05$ ).

Por otra parte, se corrobora lo afirmado por Minnaard (2015) con respecto al tipo de problema propuesto y la ocurrencia del error. (Figura 1)



Figura 1: Relación entre ocurrencia de errores y tipo de problema.

A fin de profundizar el análisis de los errores se aplicó un diseño experimental factorial de 5 factores con dos niveles ( $\alpha=0,05$ ). Se analizó una muestra de 32 exámenes clasificando los 5 tipos de errores (Dificultades del lenguaje, Dificultades para obtener información espacial, Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes) con dos niveles de ocurrencia de los mismos (alto y bajo).

En la Figura 2 se observa que al combinar tipo de error y ocurrencia de los mismos resultan significativos Dificultades para obtener información espacial y Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

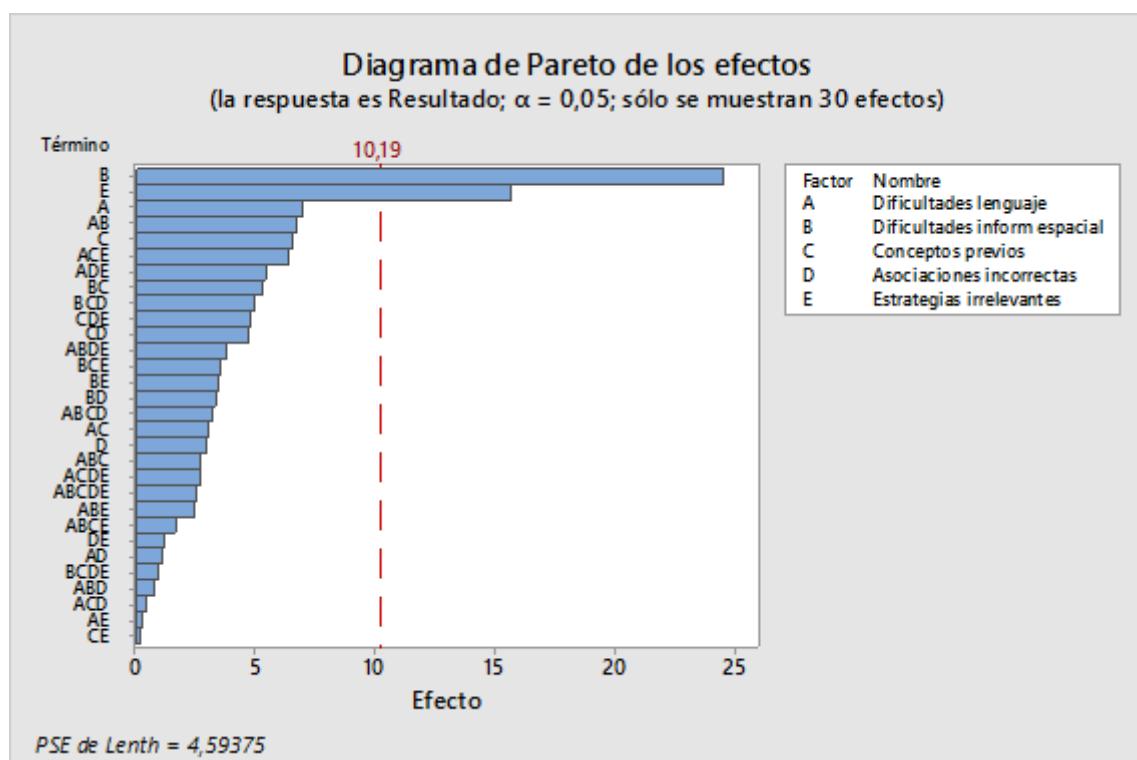


Figura 2: Relación entre tipo de error y ocurrencia de los mismos.

Al considerar los tipos de errores se observa que un mayor puntaje en el resultado de los exámenes se encuentra con un nivel bajo en los errores Dificultades para obtener información espacial y Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. (Figura 3)



Figura 3: Relación entre tipo de error, ocurrencia de los mismos y resultados de los exámenes.

En la Figura 4 se observan las interacciones entre tipo de error, ocurrencia de los mismos y los resultados de los exámenes, ratificando lo afirmado anteriormente. Se obtiene un mejor resultado en el examen con un nivel bajo en los errores Dificultades para obtener información espacial y Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. También, se verifica con la combinación de niveles bajos en Dificultades para obtener información espacial y Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

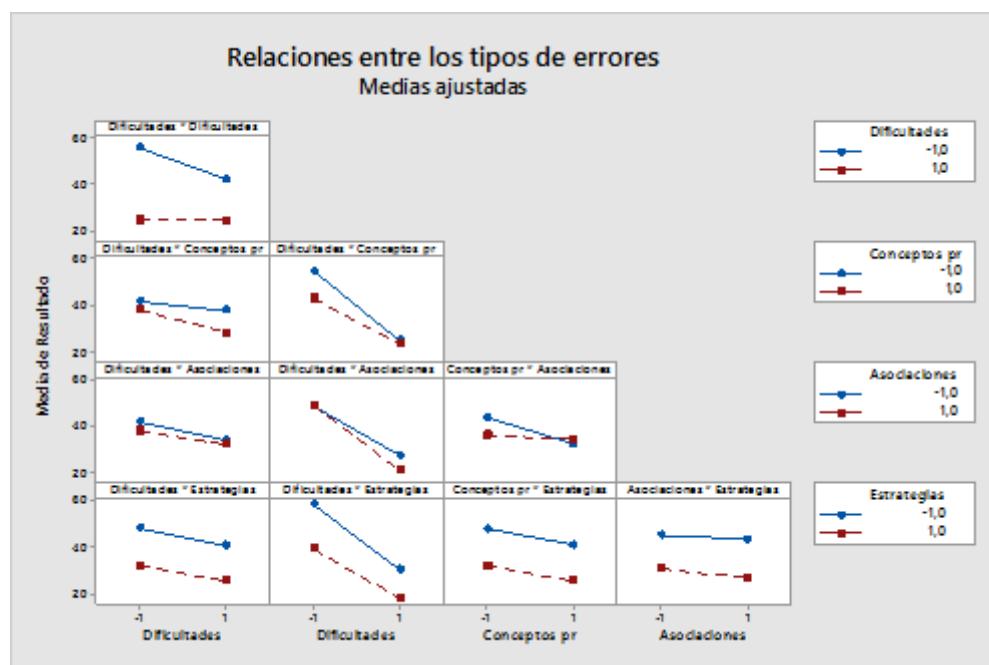


Figura 4: Interacciones entre tipo de error, ocurrencia de los mismos y resultados de los exámenes.

#### IV. Conclusiones

El estudiante, al resolver el problema, necesita evocar diferentes conceptos o nociones matemáticas que previamente conoce y en los que se apoya para resolverlo, mediante sus definiciones o descripciones características. Es por esto que utilizar distintos registros de representación semiótica facilitaría la resolución de los problemas y actividades matemáticas. Un nivel bajo en los errores Dificultades para obtener información espacial y Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes y también en Dificultades para obtener información espacial y Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos permiten obtener un mejor resultado.

#### V. Referencias

1. Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006) Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo 1<sup>a</sup> ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
2. Bachelard, G. (1988) La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.
3. del Puerto, S.; Minnaard, C. & Seminara, S. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística descriptiva. Revista Iberoamericana de Educación, Organización de los Estados Iberoamericanos (OEI). En: <https://rieoei.org/RIE/article/view/2331>.
4. Godino, J. (2003) Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Universidad de Granada, España. En: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>.
5. Minnaard, C. (2015) Análisis de los errores en matemática de los alumnos ingresantes a las carreras de Ingeniería: el Test Diagnóstico en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa ISSN 2007 – 8412.
6. Minnaard, C.; del Puerto, S. & Seminara, S.(2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación, Organización de los Estados Iberoamericanos (OEI). En: <https://rieoei.org/RIE/article/view/2646>.
7. Pochulu, M. D. (2005) Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación. Organización de Estados Iberoamericanos. N° 35/4. En: [http://www.rieoei.org/did\\_mat28.htm](http://www.rieoei.org/did_mat28.htm).
8. problem of equation and trigonometry identities. International Journal of Trends in Mathematics Education.
9. Radillo Henríquez, M. & Huerta Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la Geometría euclídea, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática. Raquel Abrate y Marcel Pochulu (Comp). Universidad Nacional de Villa María Córdoba.
10. Rico, L. (1995) Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, cap. 3. pp. 69-108, en KILPATRIK, J.; GÓMEZ, P., y RICO, L.: Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México.
11. Rico, L. (2006) Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. Revista de Educación, extraordinario 2006, pp. 275-294.
12. Rohimah, S M; Prabawanto, S. (2019) Student's difficulty identification in completing problem of quation and trigonometry identities. International Journal of Trends in Mathematics Education Research, Lhokseumawe, v. 2, n. 1, p. 34 - 36, 2019.